La source du savoir
Classe : T S_2

Année Scolaire 2025/2026
Cellule de mathématiques

ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants , déterminer D_f , calculer les limites aux bornes de D_f puis préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles de la courbe (C_f) de f

a. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ b. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{x+1} & si\ x<0\\ \sqrt{2x+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$ c. $f(x)=\begin{cases}-x+2-\frac{2x}{x^2+1} & si\ x<1\\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+6}} & si\ x\ \geq 1\end{cases}$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants , déterminer D_f, étudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0 puis interpréter les résultats :

b. $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2\ si\ x\leq 0\\ \frac{2-x}{x+1}\ \ si\ x\ >0\end{cases}$ $x_0=0$ c. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2-3}\ si\ x<-1\\ \frac{-3x}{x^2+2}\ \ x\geq -1\end{cases}$ $x_0=-1$

d. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x+1}\ si\ x\ <0\\ x-\sqrt{x}\ si\ x\geq 0\end{cases}$ $x_0=0$

EXERCICE 3

Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer sa dérivée :

a. $f(x)=\frac{2x^2-x+3}{2x-1}$ b. $f(x)=\frac{1}{3x+2}-\frac{2}{x}$ c. $f(x)=(3x+1)^3$ d. $f(x)=(1-x)\sqrt{2-3x}$

e. $f(x)=(1-3x)^2(2x-4)^3$ f. $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$ g. $f(x)=\sin^2 x+\cos 4x$

EXERCICE 4

Soit la fonction définie par : $f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$

1. Etudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée

2. a. Montrer que pour tout $x\in[2\,;4]$, $-4\leq f'(x)\leq -\frac{4}{9}$

b. En déduire que : $\forall\ x\in[2\,;4]$, $|f'(x)|\leq 4$

c. En déduire que : $\forall\ x\in[2\,;4]$, $|f(x)-5|\leq 4|x-3|$

EXERCICE 5

1. Soit f la fonction définie par : $f(x)=x\sin x$

a. Démontrer que pour tout réel x , $f(x)=2\cos x-f''(x)$

b. En déduire la primitive F de f sur IR qui prend la valeur 0 en π

2. Soit la fonction k et (C_k) sa courbe représentative, définie sur IR par :

$k(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$ a. Montrer que $|k'(x)|\leq\frac{2}{3}$ $\forall\ x\ \in\ [1\,;2]$

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|k(x)-2|\leq\frac{2}{3}|x-1|$

EXERCICE 6

I. Soit f la fonction définie par : $f(x)=4x^3+6x^2-1$

1) Dresser le tableau de variation de f . Tracer (C_f)

2) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ puis donner un encadrement de chacune d'elles par deux entiers consécutifs 3) Donner le signe de $f(x)$

II. Soit g la fonction définie par : $g(x)=3x^3-4x^2+4x$

1) Etudier g et tracer (C_g)

2) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^2 x+\cos x$

1. En utilisant la périodicité et la parité de f, justifier le choix de l'intervalle $I=[0\,;\ \pi]$ comme intervalle d'étude 2. Etudier les variations de f sur I

3. Tracer la courbe de la restriction de f à $[-\pi\,;3\pi]$ dans un repère

EXERCICE 8

Déterminer une primitive F de la fonction f dans un intervalle I à préciser dans les cas ci-dessous :

a. $f(x) = x^2(4 - x^3)^8$ b. $f(x) = \sin x . \cos^3 x$ c. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2}$ d. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{x^3}$

e. $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ f. $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{5x+4}}$ g. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ h. $f(x) = (2x - 3)^5$

i. $f(x) = \cos^2 x$ j. $f(x) = (2x - 1)\sqrt{2x - 1}$ k. $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x)^9 + x^4$

l. $f(x) = -\frac{1}{4}\sin(2x) + \cos(2x) + 17$ m. $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}$

EXERCICE 9

Soit $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et f est la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{8x}{(2x+1)^3}$

1) Déterminer les réels a et b tels que , pour tout réel ,on ait : $f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$

2) En déduire la fonction F, primitive de f sur I, telle que $F(0) =-1$.

EXERCICE 10

1) Soit u et v les fonctions définies sur $I = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$u(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $v(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$

Déterminer une primitive de u et une primitive de v sur I

2) Soit h la fonction définie sur I par : , $h(x) = \frac{x}{(2x+1)^3}$

a. Montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) = \frac{1}{2(2x+1)^2} - \frac{1}{2(2x+1)^3}$

b. Déterminer l'ensemble des primitives H de h sur I

c. En déduire la primitive G de h sur I qui prend la valeur 4 en -1

PROBLEME 1 **Extrait composition IAPG**

Partie A

Soit h la fonction définie sur $[-4\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = (x + 4)\sqrt{x + 4} - 1$

1) Dresser le tableau de variation de h

2) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-4\ ;\ +\infty[$

3) Calculer $h(-3)$, en déduire le signe de $h(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{\sqrt{|x+4|}}\ si\ x \leq 0 \\ x + 3 - \sqrt{x^2 + x + 4}\ si\ x > 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$unité 1cm

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f puis préciser les éventuelles asymptotes à (C_f)

3) Montrer que la droite $(D): y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$

4) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D) pour $x \leq 0$

5) a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats

6) a) Trouver l'expression de $f'(x)$ pour $x < -4$, pour $-4 < x < 0$ puis pour $x > 0$ et étudier son signe .

(On remarquera que $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+4)\sqrt{x+4}}$ pour $-4 < x < 0$)

b) Dresser le tableau de variation de f

7) Construire (C_f) dans le repère 8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ vers un intervalle J à préciser

c) Construire g^{-1} (fonction réciproque de g) dans le même repère

PROBLEME 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + 4}\ si\ x < 0 \\ \sqrt{|4 - x^2|}\quad si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue

3) a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
c) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter.
4) Etudier les branches infinies en l'infini
5) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0;2]$ solution de l'équation $f(x) = x$ .Vérifier que $\alpha \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$. Que représente graphiquement α.
6) Tracer soigneusement Cf dans un repère orthonormé. 7) Soit g la restriction de à $]2;+\infty[$
a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition et ses variations.
b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} c) Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{5})$ d) Exprimer $g^{-1}(x)$
e) Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère
8) a) Montrer que $\forall\, x \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}$ b) En déduire que $|f(x)-\alpha| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}|x-\alpha|$

PROBLEME 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{\sqrt{2-x}} & si\ x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\,O\,,\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,)$
(unité graphique 2cm)
1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$
2)a) Etudier la continuité de f en 0 b) Etudier la dérivabilité de f en 0
3) Montrer que : $f'(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{2(2-x)\sqrt{2-x}} & si\ x < 0 \\ \frac{-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}} & si\ x > 0 \end{cases}$
4) Déterminer les limites aux bornes de D_f puis dresser le tableau de variations de f
5) a) Montrer que la droite (Δ): $y = 2x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ puis étudier la position de (C) par rapport à (Δ) pour $x < 0$ b) Construire la courbe (C)
6) Soit g la restriction de f à $I = [0\,;\,+\infty[$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}dont on précisera son ensemble de définition J et son sens de variation
b) Représenter dans un même repère $(\,O\,,\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,)$ la courbe représentative de g^{-1}

PROBLEME 4

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 + 3x - 1$
a) Dresser le tableau de variation de u
b) Montrer que l'équation $u(x) = 1$ admet une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$
c) En déduire le signe de $u(x) - 1$ sur $\mathbb{R}$
2) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2(x^3+1)}{x^2+1}\ si\ x < 1 \\ f(x) = 1 + \sqrt{2x-1}\ si\ x \geq 1 \end{cases}$
On désigne par $(\mathbb{C}_f)$ la courbe de f dans un R.O.N $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$
a) Montrer que f est dérivable en 1
b) Ecrire l'équation de la tangente à $(\mathbb{C}_f)$ au point $A(1;2)$. Etudier la position de $(\mathbb{C}_f)$ et (T) . Conclure ?
3)a) Montrer que pour tout $x \in\,]-\infty\,;1[$, $f'(x) = \frac{2x[u(x)-1]}{(x^2+1)^2}$
b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [1\,;\,+\infty[$. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
c) Dresser le tableau de variation de f 4) a) Etudier les branches infinies de $(\mathbb{C}_f)$
b) Tracer $(\mathbb{C}_f)$. (On prendra $\alpha \approx 0{,}6\ et\ \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$)
5) Soit g la restriction de f sur $[1\,;\,+\infty[$
a) Montrer que g^{-1} est dérivable en 4 puis calculer $(g^{-1})'(4)$
b) Déterminer l'expression explicite de $g^{-1}(x)$ c) Tracer la courbe de $(\mathbb{C}_{g^{-1}})$

PROBLEME 5

A. On considère la fonction $g(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$.
1. Étudier et dresser le tableau de variations de g.

2. Montrer que l'équation $g(x)$=0 admet une unique solution α.
3. Vérifier que $\alpha \in]0\ ;1[$ puis donner le signe de g.

B. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{|x^2+3x+2|} & si\ x < -1 \\ f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^2+1} & si\ x \geq -1 \end{cases}$

On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O$,i $,j$) d'unité 2 cm
1. Déterminer Df, l'ensemble de définition de f.
2. Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de Df.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1.
4. Interpréter géométriquement les résultats. 5. Étudier la dérivabilité de f en -2.
6. Montrer que (D):y=x est une asymptote oblique à Cf en $+\infty$
7. Étudier la position de (Cf) par rapport à la droite (D).
8. Étudier la branche infinie de la courbe (Cf) en $-\infty$.
9. Étudier sur $]-\infty\ ; -2[$ la position relative de (Cf) rapport à (Δ):$y=-x-\frac{3}{2}$.
10. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec les axes du repère.
11. Montrer que f est dérivable sur $[-1;+\infty[$ et que pour tout $x \in [-1;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{(x-1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
12. Calculer la dérivée f' de f sur les autres intervalles où f est dérivable.
13. Dresser le tableau de variations complet de f.
14. Soit g la restriction f à $[-2\ ; -1]$ et Cg sa courbe représentative.
Montrer que la droite (D'): $x=-\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de Cg.
15. Tracer Cf et ses asymptotes dans le même repère $(O, \vec{\imath}\ , \vec{\jmath}\ )$.

C. On considère maintenant h la restriction de f à l'intervalle $I=]-\infty\ ; -2[$
1. Montrer que h réalise une bijection entre I et un intervalle J à préciser.
2. Sa réciproque h^{-1} est – elle dérivable sur J ? 3. Calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$.
4. Dresser le tableau de variation de h^{-1}. 5. Tracer (Ch^{-1}) courbe de h^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} & si\ x > 0 \\ 1 + \sqrt{|x(x+1)|} & si\ x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

I-1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Etudier les variations de f. 3) Etudier les branches infinies à l'infini.
4) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(o\ , \vec{\imath}\ , \vec{\jmath})$.
5) Soit $g = f_{/]0\ ,+\infty[}$ c'est-à-dire la restriction de f sur $]0\ ; +\infty\ [$.
a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in\ ]0;+\infty[$ solution de l'équation $g(x) = \frac{3}{2}$
(ne pas calculer α). Montrer que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.
b) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations (ne pas expliciter g^{-1}). Etudier la dérivabilité de g^{-1}.
c) Expliciter g^{-1}.

II- 1) Soit h la fonction définie sur $\left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ par $h(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x^2+1}$.
Montrer que $g(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow h(x) = x$. 2) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ on a : $|h'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{17}}$.

3) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 \in \left]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right[\\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $U_n \in \left]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.
b) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que : pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{17}}|U_n - \alpha|$. En déduire $\forall n \in IN$,$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^n |U_0 - \alpha|$.
Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.